

Analisi Matematica II : III prova intermedia

Corso: OMARI ☐ TIRONI ☐

A.a. 2003–2004.

COGNOME e NOME _____ N. Matricola _____

Anno di Corso _____ Laurea in Ingegneria _____

ESERCIZIO N. 1. Si calcoli

$$\iint_{\Sigma} z^2 d\sigma,$$

con $\Sigma = \{(x, y, z)^T : z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$.**RISULTATO**

$$\frac{2}{3} \pi (21^{3/2} - 27)$$

SVOLGIMENTO

Poichè Σ è il grafico della funzione $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ e $K = \{(x, y)^T : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$, si ha, usando le coordinate polari,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} z^2 d\sigma &= \iint_K [f(x, y)]^2 \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} dx dy = \iint_K (25 - x^2 - y^2) \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_2^4 \sqrt{25 - \rho^2} 5\rho d\rho \right) d\vartheta = 2\pi(-1/2) \int_2^4 \sqrt{25 - \rho^2} (-2\rho) d\rho = \\ &= -\pi \frac{2}{3} [(25 - \rho^2)^{3/2}]_2^4 = \frac{2}{3} \pi (21^{3/2} - 27). \end{aligned}$$

ESERCIZIO N. 2. Si consideri il campo vettoriale $g(x, y) = \left(\frac{2y+1}{y}, \frac{y^3-x}{y^2} \right)^T$ su $A = \{(x, y)^T : y > 0\}$.

(i) Si calcoli il rotore di g .

Si ha

$$\operatorname{rot} g(x, y) = \left(0, 0, \frac{-1}{y^2} - \frac{-1}{y^2} \right)^T = \underline{0}$$

in A .

(ii) Si dica se g è conservativo in A e in caso affermativo si trovi un potenziale di g in A .

Poichè g è irrotazionale e A è stellato, il Lemma di Poincarè implica che g è conservativo. Un potenziale $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ di g in A soddisfa

$$f_x(x, y) = 2 + \frac{1}{y} \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = y - \frac{x}{y^2}.$$

Dalla prima equazione si ricava

$$f(x, y) = \int \left(2 + \frac{1}{y} \right) dx = 2x + \frac{x}{y} + k(y),$$

con $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Dalla seconda equazione si ottiene

$$f_y(x, y) = -\frac{x}{y^2} + k'(y) = y - \frac{x}{y^2}$$

e quindi $k(y) = \frac{1}{2}y^2$. Pertanto si ha

$$f(x, y) = 2x + \frac{x}{y} + \frac{1}{2}y^2.$$

(iii) Si calcoli $\int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds$, con $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, 2 \sin t + 1)^T$.

Poichè g è conservativo, si ha

$$\int_{\gamma} \langle g, \tau \rangle ds = f(\gamma(\pi/2)) - f(\gamma(0)) = f(0, 3) - f(1, 1) = 1.$$

COGNOME e NOME _____**ESERCIZIO N. 3.** Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \cos x + 2 \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

RISULTATO

$$y(x) = 2 - e^{\sin x}$$

SVOLGIMENTO

La soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$z(x) = c e^{\sin x},$$

con $c \in \mathbb{R}$. Una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$\bar{y}(x) = e^{\sin x} \int_0^x e^{-\sin t} 2 \cos t \, dt = 2e^{\sin x} [e^{-\sin t}]_0^x = 2(1 - e^{\sin x}).$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione completa è

$$y(x) = c e^{\sin x} + 2(1 - e^{\sin x}).$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$c = 1.$$

Dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = 2 - e^{\sin x}.$$